

2 Polynome

- Wenn wir Potenzen kennen, können wir uns als nächstes daraus *Polynome* zusammenbauen. Im ganzen Kapitel werden nur nichtnegative ganze Zahlen als Exponenten vorkommen (also aus \mathbb{N}_0), so dass als Basis beliebige (z.B. reelle) Zahlen zulässig sind.

- Ein Term der Form x^n , $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ heißt *Monom*.

- Ein Term der Form

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i$$

mit $n + 1$ Zahlen a_i als *Koeffizienten* heißt *Polynom* (in x).

- Das Summenzeichen dient der einfacheren Notation:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i := a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n.$$

- Polynom als code:

```
program Polynom;
const
  n = 3;
var
  a: array[0..n] of Real = (4.0, 0.0, 7.0, 15.0);
  x: Real = 2.0;
  sum: Real;
  i: Integer;
begin
  sum := 0.0;
  for i := 0 to n do
    sum := sum + a[i]*(x**i);
  WriteLn(sum);
end.
```

Wer will kann sich einen effizienteren code überlegen.

- Beispiele für Polynome:

- 1 (nach 0 das Einfachste!)
- $7x + 3$
- $15x^3 + 7x^2 + 4$ (Es können auch Koeffizienten 0 sein)

- Der *Grad* eines Polynoms P (in Zeichen: $\deg(P)$) ist die höchste vorkommende Potenz mit Koeffizient ungleich Null — mit Ausnahme von

$\deg(0) := -\infty$ („minus unendlich“). Es gilt also: $\deg\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) \leq n$ (kleiner als n , wenn $a_n = 0$ ist). Für die Beispiele von oben gilt: $\deg(1) = 0$, $\deg(0) = -\infty$, $\deg(7x+3) = 1$ und $\deg(15x^3+7x^2+4) = 3$.

- Rechenregeln für \deg : Sei p_n Polynom vom Grad n .

$$\deg(p_n p_m) = n + m = \deg(p_n) + \deg(p_m)$$

$$\deg(p_n + p_m) \leq \max\{n, m\} = \max\{\deg(p_n), \deg(p_m)\}$$

Speziell für $p_n = 0$ soll daher auch gelten:

$$\deg(0 \cdot p_m) = \deg(0) + m = \deg(0)$$

$$\deg(0 + p_m) = \max\{\deg(0), m\} = m$$

Also $\deg(0) < 0$, so dass $\deg(0) + 1 = \deg(0) \rightarrow \deg(0) = -\infty$. Manchmal auch $\deg(0) = -1$ in der Computeralgebra.

- Addition von Polynomen:

$$(x^2 + 2x + 1) + (x^2 - x + 3) = 2x^2 + x + 4$$

Multiplikation von Polynomen:

$$(x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 - x + 3) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 5x + 3.$$

Division (mit Rest) geht auch. Im Allgemeinen funktioniert die Division analog zum schriftlichen Dividieren ganzer Zahlen.

$$(x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - x + 3) - 3x + 1$$

- Division mit Rest bei den natürlichen Zahlen:

Zu $n, m \in \mathbb{N}$ gibt es eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{N}$ mit $r < m$, so dass $n = q \cdot m + r$. Dann ist q das Ergebnis, r der Rest der ganzzahligen Division von n durch m .

Jetzt mit Polynomen:

Zu zwei Polynomen N und M mit Koeffizienten aus \mathbb{R} gibt es eindeutig bestimmte Polynome Q, R mit Koeffizienten aus \mathbb{R} mit $\deg(R) < \deg(M)$, so dass $N = Q \cdot M + R$. Dann ist Q das Ergebnis, R der Rest der Polynomdivision von N durch M .

- Wichtige Spezialfälle sind die Polynome von kleinem Grad. Im Fall von $\deg(P) \leq 1$ heißt P *linear*, ist also von der Form $P = a \cdot x + b$. Diese kommen z.B. in linearen Gleichungen vor, die die Form

$$ax + b = 0$$

haben oder sich auf diese Form bringen lassen, und dann leicht zu lösen sind ($a \neq 0$ vorausgesetzt).

- Im Fall von $\deg(P) \leq 2$ heißt P *quadratisch*, ist also von der Form $P = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Dazu gehören die quadratischen Gleichungen (hier für $a = 1$)

$$x^2 + px + q = 0,$$

mit den Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

sofern $p^2 \geq 4q$ (andernfalls komplexe Lösungen).

- Die Nullstellen x_1 und x_2 eines quadratischen Polynoms liefern eine *Zerlegung in Linearfaktoren*:

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Entsprechendes gilt auch für Polynome höheren Grades: sei P ein Polynom vom Grad n in x und x_1 eine Nullstelle von P (also $P(x_1) = 0$). Dann kann man einen Linearfaktor $x - x_1$ abspalten (z.B. durch Polynomdivision):

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - x_1)$$

mit einem Polynom $Q(x)$ vom Grad $n - 1$.

Das ist nützlich: die Nullstellen von P sind nun x_1 und die Nullstellen eines Polynoms Q von kleinerem Grad, wir haben das Problem also auf ein kleineres zurückgeführt. Hauptsatz der Algebra: Polynom zerfällt in Linearfaktoren.

- Polynome P und rationale Funktionen $\frac{P}{Q}$ sind wichtige Klassen von Beispielfunktionen und dienen als Baukasten, um kompliziertere Funktionen anzunähern (Potenzreihe, Computergraphik, Bildverarbeitung).

Aufgaben

2.1 Lineare Gleichungen — bestimme für die folgenden Gleichungen jeweils alle x , die die Gleichung erfüllen:

a) $4 \cdot (x - 1) = 5 \cdot (x - 2)$

b) $(x + 1)^2 = x^2 + 20$

c) $\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-2} - 1$

d) $(x + 2) \cdot (x - 2) = 21$

Naja, die letzte Gleichung ist nicht linear in x ; wen das stört, der führt zwischendrin ein $y := x^2$ ein. . .

2.2 Leite die Lösungsformel $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ der quadratischen Gleichung mit Hilfe der so genannten *quadratischen Ergänzung* her, d.h. bringe die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ erst in die Form $(x + \alpha)^2 + \beta = 0$ und löse die Gleichung dann nach x auf.

2.3 Bestimme alle x mit $x^4 - 2x^2 = 63$ – nach Möglichkeit auf zwei verschiedenen Lösungswegen.

2.4 Gegeben sind die Punkte $A(0|2)$, $B(2|6)$ und $C(-1|1.5)$.

a) Konstruiere eine Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, so dass ihr Graph durch diese drei Punkte verläuft. Wie viele solcher Funktionen gibt es?

b) Bestimme y_1 und y_2 so, dass die Punkte $D(4|y_1)$ und $E(-3|y_2)$ ebenfalls auf dem Graphen liegen!

2.5 Polynomdivision: Dividiere

a) $2x^4 - 6x^3 + x^2 - 2x$ durch $x - 3$ und

b) $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ durch $x^2 - 2$.

Bestimme alle Nullstellen von $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$.

2.6 Berechne $\left(\sum_{i=0}^n x^i\right) \cdot (x - 1)$ und stelle damit eine geschlossene Formel

(d.h. ohne Summenzeichen) zur Berechnung von $\sum_{i=0}^n x^i$ für $x \neq 1$ auf.

2.7 Stelle Regeln für $\deg(P+Q)$ und für $\deg(P \cdot Q)$ für beliebige Polynome P und Q auf (in Abhängigkeit von $\deg(P)$ und $\deg(Q)$) und gib Beispiele für die verschiedenen Fälle an.

2.8 Gib eine (Summen-) Formel an für die Koeffizienten c_k des allgemeinen Produkts zweier Polynome

$$\left(\sum_{k=0}^{n_1+n_2} c_k x^k \right) = \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n_2} b_j x^j \right).$$

Insbesondere: Welche Koeffizienten a_i und b_j werden für die Berechnung eines c_k benötigt? Dafür gibt es mehrere Fälle in Abhängigkeit von k, n_1 und n_2 . Daher hier eine allgemeine Bemerkung zum Aufgabenlösen: der Entwurf einer geeigneten Skizze ist oft der wesentliche Lösungsschritt...