

3 Logarithmen

- Umkehrfunktion der Potenzfunktion x^n : $y = x^n \Rightarrow x = y^{\frac{1}{n}}$
- *Definition:* Zu $x > 0$ und $b > 0, b \neq 1$ sei der Logarithmus von x zur Basis b folgende Zahl $y \in \mathbb{R}$:

$$y = \log_b x \Leftrightarrow b^y = x$$

Drei spezielle Basen kommen so oft vor, dass sie eigene Symbole bekommen: 2, 10 und $e = 2,71828\dots$:

$$\text{ld } x := \log_2 x, \text{lg } x := \log_{10} x \text{ und } \ln x := \log_e x.$$

- Rechenregeln 1: Potenzieren und Logarithmieren (zur selben Basis) heben sich gegenseitig auf:

$$x = b^{\log_b x}, \quad x = \log_b(b^x)$$

Aus "Mal" wird "Plus":

$$\begin{aligned} \log_b(x \cdot y) &= \log_b(x) + \log_b(y), \\ z &= \log_b(xy) \text{ ist die Zahl mit } b^z = xy \\ u &= \log_b(x) \text{ ist die Zahl mit } b^u = x \\ v &= \log_b(y) \text{ ist die Zahl mit } b^v = y \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$b^{u+v} = b^u \cdot b^v = xy = b^z \rightarrow z = u + v \rightarrow \log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

- Rechenregeln 2: Aus "Bruch" wird "Minus":

$$\begin{aligned} \log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x) - \log_b(y) \\ z &= \log_b\left(\frac{x}{y}\right) \text{ ist die Zahl mit } b^z = \frac{x}{y} \\ u &= \log_b(x) \text{ ist die Zahl mit } b^u = x \\ v &= \log_b(y) \text{ ist die Zahl mit } b^v = y \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}b^{u-v} &= \frac{b^u}{b^v} = \frac{x}{y} = b^z \rightarrow z = u - v \\ &\rightarrow \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)\end{aligned}$$

- Rechenregeln 3: Aus "Potenzieren" wird "Mal":

$$\begin{aligned}\log_b(x^n) &= n \cdot \log_b(x) \\ \log_b(x^n) &= \log_b(x \dots x) = \log_b(x) + \dots + \log_b(x) = n \cdot \log_b(x) \\ \log_b(x^{\frac{1}{n}}) &= \frac{\log_b(x)}{n} \\ t &= \log_b(x^{\frac{1}{n}}) \text{ ist die Zahl mit } b^t = x^{\frac{1}{n}} \\ t &= \log_b(x^{\frac{1}{n}}) \text{ ist die Zahl mit } b^{nt} = x \\ nt &= \log_b(x) \text{ ist die Zahl mit } b^{nt} = x\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\log_b(x^{\frac{1}{n}}) &= t = \frac{\log_b(x)}{n} \\ \log_b(x^{\frac{r}{q}}) &= \log_b((x^{\frac{1}{q}})^r) = r \cdot \log_b(x^{\frac{1}{q}}) = r \cdot \frac{\log_b(x)}{q} = \frac{r}{q} \log_b(x)\end{aligned}$$

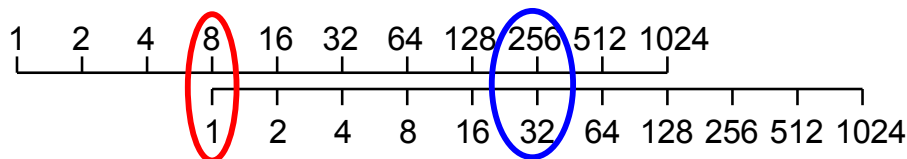
- Basis umrechnen: Was tun, wenn ein Logarithmus aus einer Basis in eine andere Basis umzurechnen ist?

$$\begin{aligned}\log_c(x) &= \log_b(x) \cdot \log_c(b) \\ z &= \log_c(x) \text{ ist die Zahl mit } c^z = x \\ u &= \log_b(x) \text{ ist die Zahl mit } b^u = x \\ v &= \log_c(b) \text{ ist die Zahl mit } c^v = b\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}c^z &= x = b^u \rightarrow \log_c(c^z) = \log_c(b^u) \rightarrow z \cdot \log_c(c) = u \cdot \log_c(b) \\ &\rightarrow z = \log_b(x) \cdot \log_c(b)\end{aligned}$$

- Anwendung: Rechenschieber. Das Addieren ist wesentlich einfacher als das Multiplizieren. Logarithmus bietet die Möglichkeit, das Multiplizieren auf das Addieren zurückzuführen. Verwende logarithmische Skala: Abstand von zwei Achsenbeschriftungen x_1 und x_2 proportional zu $\log x_1 - \log x_2 = \log(x_1/x_2)$.



Ein Rechenschieber für Informatiker. Berechnet wird $8 \cdot 32 = 256$.

- Auch für Besitzer von Taschenrechnern sind logarithmische Skalen nützlich — u.A. für Diagrammbeschriftungen. Zum Beispiel zur Beschreibung von Wachstumsprozessen (Geldanlagen!) sind Verhältnisse y_1/y_2 zwischen zwei Werten meist interessanter als die absoluten Abstände $y_1 - y_2$; z.B. um bei einer Geldanlage die Rendite zu ermitteln. Summen und Differenzen von Streckenlängen kann das Auge gut abschätzen, Quotienten dagegen nicht. Daher sollte man in diesem Fall die Ordinate logarithmisch skalieren und könnte aus der Steigung der Kurve die Rendite abschätzen.

Aufgaben

- 3.1 Skizziere den Graph der Funktion $x \mapsto \text{ld } x$ für $x = 2^{-1000} \dots 1000$.
- 3.2 Bestimme für beliebiges positives $b \neq 1$ folgende Werte: $\log_b 1$ und $\log_b b$.
- 3.3 Finde mit den Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen eine Rechenregel für $\log_b \sqrt[n]{x}$.
- 3.4 Vereinfache folgende Ausdrücke (b, c, x und y seien positiv mit $b, c \neq 1$):

$$b^{x+\log_b y}, (\sqrt{b})^{\log_b x} \text{ und } \log_c \left(x^{\frac{1}{\log_c b}} \right).$$

- 3.5 Vereinfache (es sei $x > y > 0$)

$$\ln(x^2 - y^2) - \ln(x - y).$$

- 3.6 Wenn für Abszisse (vulgo „ x -Achse“) und Ordinate logarithmische Maßstäbe verwendet werden — wie sehen dann die Graphen von Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ aus?
- 3.7 Jaja, ich weiß schon, dass die allermeisten von Ihnen nicht vorhaben, jemals auf einem Rechenschieber zu rechnen. Zum Logarithmen-Üben ist das Ding (bzw. eine Vorstellung davon) aber immer noch praktisch! Manchmal wollen auch Informatiker die Länge der Diagonale eines Quadrats berechnen — markiere dazu auf dem Informatiker-Rechenschieber den Wert $\sqrt{2}$.
- Markiere nun noch denjenigen Wert, mit dem man die Kantenlänge eines Würfels multiplizieren muss, um die Kantenlänge eines Würfels mit doppeltem Volumen zu erhalten.
- Wie kann man mit unserem Rechenschieber — ohne die Skalen zu verlängern — den Wert von $8 \cdot 512$ ablesen? (Tipp: am echten Rechenschieber heißt diese Technik *Durchschieben*. Bei unserm Modell ist ggf. mal wieder die Näherung $2^{10} \approx 1000$ hilfreich.)
- 3.8 In wieviel Jahren hat sich eine mit einem Zinssatz von $p\%$ im Jahr verzinsten Geldanlage (incl. Zinseszins) verdoppelt? Berechne diese Dauer für $p = 1, 2, 3, 4$ und 10 und vergleiche die Ergebnisse mit der Faustregel „70 Jahre geteilt durch Zinssatz“.
- 3.9 Zeige, dass $\text{ld } 10$ keine rationale Zahl ist (es gibt keine ganzen Zahlen x, y mit $\text{ld } 10 = x/y$).

