

6 Mengen

- Beispiele: \mathbb{N} , \mathbb{R} , Autos,...Saubere Definition einer Menge ist schwierig.
- Pragmatischer Ansatz (als Informatiker): Alles, was aussieht wie eine Menge, ist eine Menge. Wichtig für uns: Wie geht man mit Mengen um, also Definition einer Menge im Programm und Algorithmen.
- Mengen bekommen abkürzende Namen: A, B, C, \dots . Für ein bestimmtes "Ding" x und eine Menge A können wir feststellen, ob x ein Element von A ist: der Wahrheitswert der Aussage $x \in A$ wird festgestellt.
- Exkurs: Fuzzy-Menge: Menge der Deutschen: Man kann 100% Deutscher sein, oder 0%, aber auch 50% usw., d.h. die Mitgliedschaft eines Elementes x in der Menge D wird beschrieben z.B. durch die Werte 0, 0.5 = unentschieden, und 1. Oder allgemeiner durch eine Funktion

$$m(x), \quad 0 \leq m(x) \leq 1,$$

d.h. x ist Mitglied in der Menge D vom Grad $m(x)$. $m(x)$ als Grad der "Deutschheit".

- Notation von Mengen: Im einfachsten Fall enthält die Menge nur endlich viele Elemente:

$$A := \{1, 2, 3\}$$

Für diese Menge ist also $1 \in A$ eine wahre, $4 \in A$ hingegen eine falsche Aussage.

- oder mittels Abkürzung:

$$B := \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$$

- oder (unendliche Mengen):

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

- Zur besseren Eindeutigkeit:

$$B := \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 1000\}$$

(der Doppelpunkt ist als „für die gilt“ zu lesen).

- Menge der Zweierpotenzen:

$$C := \{x \in \mathbb{N} : \exists i \in \mathbb{N}_0 : x = 2^i\}.$$

oder kürzer

$$C := \{2^i, i \in \mathbb{N}_0\},$$

- Speziell die leere Menge \emptyset (oder auch einfach $\{\}$) ist definiert durch:

$$\forall x : x \notin \emptyset.$$

- Die Anzahl der Elemente (die *Mächtigkeit*) einer Menge A bezeichnen wir mit $|A|$, insbesondere ist also $|\emptyset| = 0$.
- Zwei Mengen sind gleich, wenn sie genau dieselben Elemente enthalten:

$$\forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

- Damit sehen wir, dass z.B. die Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{3, 2, 1\}$ gleich sind — die Elemente einer Menge haben keine spezielle Anordnung.
- Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B ($A \subseteq B$), wenn alle in A enthaltenen Elemente auch in B enthalten sind:

$$\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

- Die *Schnittmenge* $A \cap B$ ist definiert durch:

$$x \in A \cap B :\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)),$$

die *Vereinigungsmenge* $A \cup B$ durch:

$$x \in A \cup B :\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$$

und die *Differenz* $A \setminus B$ über:

$$x \in A \setminus B :\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg(x \in B))$$

- Für die Operationen \cup und \cap gelten ähnliche Gesetze wie für \wedge und \vee .
Z.B:

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ (A \cap B) \cap C &= B \cap (A \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

- Das *kartesische Produkt* $A \times B$ ist die Menge aller Paare mit einem Element aus A und einem Element aus B :

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

- Beispiel: Spielpaarungen in der Bundesliga (natürlich ohne (a, a))
- Kartesische Produkte spielen eine große Rolle für Relationen und Funktionen.
- Potenzmenge: Mengen können auch Element anderer Mengen sein; z.B. bei *Potenzmengen* $P(A)$ einer Menge A , die definiert ist als die Menge aller Teilmengen von A :

$$P(A) := \{B : B \subseteq A\}$$

Beispiel: $A = \{1, 2\} \rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ mit Mächtigkeit: $|A| = n \rightarrow |P(A)| = 2^n$

- Mehr über Mächtigkeit: Mächtigkeit einer endlichen Menge A : $|A| = n$. Mächtigkeit einer unendlichen Menge durch Abzählen: Abzählbar $\leftrightarrow \mathbb{N}$; Nicht abzählbar, z.B. \mathbb{R} .

Aufgaben

6.1 Gegeben sind die Teilmengen $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Gib die folgenden Mengen an:

- | | | |
|----------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $A \cup B$, | b) $A \cap B$, | c) $A \setminus B$, |
| d) $A \setminus D$, | e) $B \setminus D$, | f) $D \setminus A$, |
| g) $D \setminus B$, | h) $D \setminus (A \cup B)$, | i) $D \setminus (A \cap B)$. |

6.2 Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge $P(A)$ einer (endlichen) Menge A mit $|A| = n$? Schreibe z.B. alle Teilmengen von $\{1, 2\}$ oder $\{1, 2, 3\}$ auf, und versuche eine Regelmäßigkeit zu erkennen. Wie könnte man die Regelmäßigkeit allgemein beweisen? Zeige dass für endliche Mengen stets $|A| < |P(A)|$ gilt.

6.3 Bestimme folgende Mächtigkeiten:

- a) $|\{1, 4, 6\}|$, b) $|\emptyset|$, c) $|\{\emptyset\}|$, d) $|\{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}|$.

6.4 Zeichne Punkt Mengen A, B und C , die die folgenden vier Bedingungen zugleich erfüllen:

$$\begin{array}{ll} (1) & A \cap B \cap C = \emptyset \\ (2) & A \cap B \neq \emptyset \\ (3) & B \cap C \neq \emptyset \\ (4) & A \cap C \neq \emptyset \end{array}$$

Gib daraufhin Zahlenmengen möglichst kleiner Mächtigkeit an, die diese Bedingungen erfüllen.

6.5 A, B und C seien Teilmengen einer Grundmenge G .

Beweise von den folgenden Aussagen die wahren und gib für die falschen jeweils ein Gegenbeispiel an.

- a) Wenn $A \cup B = A \cup C$ ist, dann ist $B = C$.
- b) Wenn $A \setminus B = A$ ist, dann ist $B = \emptyset$.
- c) Wenn $B = \emptyset$ ist, dann ist $A \setminus B = A$.
- d) $A \setminus B$ und $B \setminus C$ sind immer disjunkt (d.h., die Schnittmenge ist leer).

6.6 Beweise, dass zwei Mengen A und B gleich sind, wenn sie wechselseitig Teilmengen voneinander sind (und auch nur dann), also $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

6.7 Die 30 Schüler einer Klasse schrieben in den drei Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik Prüfungsarbeiten mit folgendem Ergebnis: In Deutsch bestanden 22, in Englisch bestanden 17 und in Mathematik bestanden 22 Schüler. 4 bestanden weder Deutsch noch Englisch, 3 bestanden weder Deutsch noch Mathematik, 5 bestanden weder Englisch noch Mathematik. 1 Schüler schaffte keine der drei Prüfungen.

Wie viele Schüler bestanden die Prüfung in allen drei Fächern ?

Hinweis: Zeichne die Mengen!

6.8 Mit der Schreibweise

$$\bigcup_{k=1}^n A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

kann man bequem auch kompliziertere Mengen formulieren, insbesondere dann, wenn man erlaubt, dass auch unendlich viele Menge vereinigt werden dürfen:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

Ein Element ist in dieser Vereinigungsmenge enthalten, wenn es in einer der Mengen A_k enthalten ist.

Überlege Dir, wie man zum Beispiel die Menge der Primzahlen hinschreiben könnte (Tipp: formuliere dazu z.B. die Menge V_2 der Vielfachen von 2, etc.).