7 Relationen

- Mit *Relationen* können wir Beziehungen zwischen je zwei Dingen ausdrücken. Seien dazu A und B zwei Mengen, etwa

  $$A := \{\text{Kuh}, \text{Schaf}, \text{Ziege}, \text{Fisch}\}$$

  und

  $$B := \{\text{„Muh“}, \text{„Mäh“}, \text{„“}\}.$$

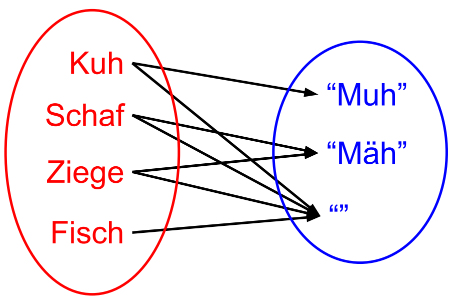
  Eine Relation R ist dann eine Menge mit den Paaren (a, b) mit einem $a \in A$ und einem $b \in B$, von denen wir sagen wollen, dass a mit b in Beziehung steht.

- Eine Relation ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts ($R \subseteq A \times B$).

- Statt $(a, b) \in R$ schreibt man meist aRb (insbesondere, wenn der Name der Relation kein Buchstabe wie R ist, sondern irgendein schönes Symbol, z.B. $\leq$ oder $\lhd$).

- Definieren wir z.B. die Relation $\lhd$ als „kann sagen“, bekommen wir vielleicht folgende Relation:

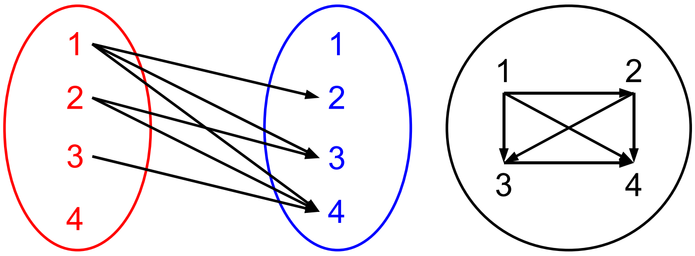
$$\begin{aligned} \lhd \quad := \{ \quad & (\text{Kuh}, \text{„Muh“}),\\ & (\text{Kuh}, \text{„“}),\\ & (\text{Schaf}, \text{„Mäh“}),\\ & (\text{Schaf}, \text{„“}),\\ & (\text{Ziege}, \text{„Mäh“}),\\ & (\text{Ziege}, \text{„“}),\\ & (\text{Fisch}, \text{„“}) \ \} \end{aligned}$$



- Damit haben wir z.B. folgendes: Kuh $\lhd$ „Muh“ und Kuh $\lhd$ „“, aber Kuh $\ntriangleleft$„Mäh“ (will heißen: $\neg$(Kuh $\lhd$ „Mäh“)).

- Es ist ohne weiters möglich, dass A und B dieselbe Menge sind, wir sprechen dann von einer „Relation R auf der Menge A“.

  Etwa für $A = \{1, 2, 3, 4\}$: Auf dieser Menge enthält die Standardrelation „ist kleiner“ 6 Paare: $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$



- Relationen lassen sich klassifizieren anhand möglicher Eigenschaften. Typisches Vorgehen von Mathematikern:
  - Definiere etwas, z.B. Mengen, Relationen
  - Untersuche, welche Eigenschaften diese "Dinge" haben können. Welche Struktur.

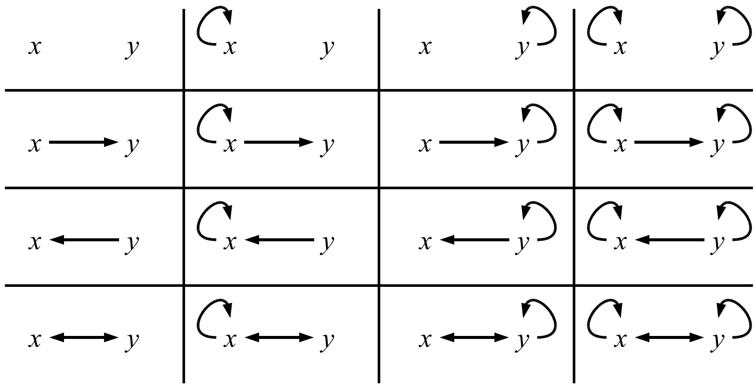
  Eine Relation R auf A heißt
  - Reflexiv, wenn gilt $\forall x \in A : xRx$
  - Symmetrisch, wenn gilt $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$
  - Asymmetrisch, wenn gilt $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx$
  - Antisymmetrisch, wenn gilt $\forall x, y \in A : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$
  - Transitiv, wenn gilt: $\forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$
  - Konnex (auch: linear oder total), wenn gilt: $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$

Aufgaben

7.1 Wie viele Relationen auf einer endlichen Menge A mit n Elementen gibt es?

7.2 Gib für $A = \{x, y, z\}$ Relationen an mit folgenden Eigenschaften:
- Reflexiv, aber nicht symmetrisch
- Weder symmetrisch noch antisymmetrisch
- Antisymmetrisch, aber nicht asymmetrisch
- Konnex, aber nicht transitiv
- Symmetrisch und konnex

7.3 Hier sind alle Relationen auf der Menge $A = \{x, y\}$:



Welche dieser Relationen sind reflexiv, welche symmetrisch, welche asymmetrisch, welche antisymmetrisch, welche transitiv und welche konnex?

7.4 Zeige, dass wenn $xRy \Rightarrow \neg yRx$ erfüllt ist, dann auch $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$. Verwende dazu die Regel zur Auflösen der Implikation ($A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$) und die de morgansche Regel.

7.5 Es sei R eine beliebige Relation auf einer Menge A. Die Relation R^S auf A sei definiert als

$$R^S := \{(x, y) \in A \times A : xRy \vee yRx\}$$

- Was bedeutet das für das Bild mit den Pfeilen?
- Zeige, dass R^S eine symmetrische Relation ist.
- Zeige, dass R^S die kleinste symmetrische Relation auf A ist, die R enthält: für jede symmetrische Relation R' auf A mit $R \subseteq R'$ gilt $R^S \subseteq R'$.
- Beweise oder widerlege: Wenn R transitiv ist, ist auch R^S transitiv.

7.6 Gibt es Relationen, die sowohl reflexiv als auch asymmetrisch sind? (Vorsicht: genau hinsehen!)