

## 8 Ordnungsrelationen

- Nun betrachten wir spezielle Relationen auf einer Menge  $A$ , um Ordnung (Struktur) in diese Menge zu bringen. Die Relationen werden dazu dienen, jeweils zwei Elemente zu vergleichen, etwa wie das  $\leq$  auf den reellen Zahlen.
- Welche besondere Eigenschaften aus unserem Katalog sollte eine solche Relation haben:
  - Transitiv: Wenn wir  $x$  vor  $y$  und  $y$  vor  $z$  einsortieren, sollte auch  $x$  vor  $z$  landen.
  - Antisymmetrisch: Für zwei verschiedene Elemente  $x \neq y$  wollen wir eine eindeutige Reihung haben, es darf nicht  $xRy$  und  $yRx$  sein.
  - Reflexiv: Für  $\leq$  soll auch  $xRx$  gelten. (Für  $<$  gälte dies nicht)
- Eine transitive, antisymmetrische und reflexive Relation heißt *partielle Ordnung*.
- Warum „partiell“, sieht man am besten an einem Beispiel: Sei  $A$  die Potenzmenge einer beliebigen Menge, z.B.  $A = P(\{1, 2, 3\})$ . Die Relation  $\subseteq$  auf  $A$ , also „ist Teilmenge von“, erfüllt die Bedingungen an eine partielle Ordnung. Wenn die Ausgangsmenge aber wenigstens zwei Elemente enthält, ist die Potenzmenge dadurch noch nicht geordnet, da z.B. weder  $\{1\} \subseteq \{2\}$  noch  $\{2\} \subseteq \{1\}$  gilt.

Die Relation sollte also auch noch konnex sein.

- Eine konnexe partielle Ordnung nennt man (*totale*) *Ordnung*.
- In einer endlichen Menge  $A$  mit einer totalen Ordnung  $R$  kann man die Elemente so numerieren ( $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  mit  $n = |A|$ ), dass gilt:

$$x_1Rx_2, x_2Rx_3, x_3Rx_4, \dots, x_{n-1}Rx_n$$

(oder anders ausgedrückt:  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : i \leq j \Leftrightarrow x_iRx_j$ ).

- Der Beweis ist *konstruktiv*. Wir geben einfach ein Verfahren (einen Algorithmus) an, das diese Ordnung herstellt (Quicksort).
- Wir machen eine Induktionsbeweis nach  $n$ . Für  $n = 0$  und  $n = 1$  ist nichts zu zeigen, also sei nun  $n \geq 2$  und der Satz gelte für alle Mengen  $B$  mit  $0 \leq |B| < n$ .

Wir wählen ein beliebiges  $z \in A$  (man nennt es *Pivotelement*) und zerlegen  $A$  in drei Mengen:

- $A_1 := \{x \in A : xRz \wedge x \neq z\}$
- $A_2 := \{z\}$
- $A_3 := \{x \in A : zRx \wedge x \neq z\}$

Nun ist  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , denn  $R$  ist konnex: für jedes  $x \in A$  gilt  $xRz$  oder  $zRx$  und somit

$$\forall x \in A : (xRz \wedge x \neq z) \vee (x = z) \vee (zRx \wedge x \neq z).$$

Weiter sind die  $A_i$  paarweise disjunkt:  $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset$  (Aufgabe 8.3).

Daher ist  $|A| = |A_1| + 1 + |A_3|$ , mithin  $0 \leq |A_1| =: m < |A|$  und  $0 \leq |A_3| = n - 1 - m < |A|$ . Wir wenden die Induktionsvoraussetzung an und nehmen an, dass  $A_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$  und  $A_3 = \{x_{m+2}, \dots, x_n\}$  sortiert sind (in  $A_3$  sind die Indizes um  $m + 1$  verschoben, das stört die Sortierung nicht).

Dann ist auch  $A$  mit der Numerierung

$$A = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1} := z, x_{m+2}, \dots, x_n\}$$

sortiert.

- Dieser Induktionsbeweis lässt sich in ein rekursives Programm umsetzen, in dem man zur Sortierung der Teilmengen  $A_1$  und  $A_3$  das Programm selbst wieder aufruft.
- Für den Beweis ist die Effizienz der Konstruktion egal. Ein echtes Sortierverfahren in der Praxis sollte aber effizient (schnell) sein.

## Aufgaben

- 8.1 Was für partielle Ordnungen und was für totale Ordnungen gibt es auf zweielementigen Mengen  $\{x, y\}$ ?
- 8.2 Führe das im Beweis verwendete Sortierverfahren für die Menge  $A = \{d, b, c, a, f, e\}$  mit der alphabetischen Sortierung durch. Verwende als Pivotelement  $z$  immer das vorderste Element (am Anfang also  $d$ ) und lasse die Reihenfolge der Elemente in  $A_1$  und  $A_3$  so, wie sie in  $A$  waren (also nicht beim Zerlegen aus Versehen sortieren)!
- 8.3 Beweise, dass die  $A_i$  aus dem Beweis in der Vorlesung paarweise disjunkt sind.
- 8.4 Eine schöne Darstellung einer Relation  $R$  auf einer endlichen (und nicht zu großen) Menge  $A$  ist mittels einer Tabelle, bei der Zeilen und Spalten mit den Elementen von  $A$  beschriftet sind (beides Mal dieselbe Reihenfolge wählen) und in der wir genau dann in Zeile  $x$  und Spalte  $y$  ein Kreuz machen, wenn  $xRy$  gilt.
- Wie sieht die Tabelle für die Teilmengenrelation auf  $P(\{1, 2\})$  aus?
  - Wie sieht man einer solchen Tabelle an, ob die Relation
    - reflexiv,
    - konnex und/oder
    - antisymmetrischist?
  - Wie sieht die Tabelle einer Ordnung aus, wenn Zeilen- und Spaltenbeschriftungen nach dieser Ordnung sortiert sind?
- 8.5 Für eine endliche Menge  $A$  sei jedes Element  $x \in A$  mit einer Rangziffer  $r(x) \in \mathbb{N}$  versehen. Wir betrachten die Relation  $R$  auf  $A$  mit

$$xRy :\Leftrightarrow r(x) \leq r(y)$$

- Zeige, dass  $R$  transitiv, reflexiv und konnex ist.
  - Unter welcher Bedingung an die Beschriftungen  $r(x)$  ist  $R$  antisymmetrisch, also eine Ordnung?
- 8.6 Wenn man für eine endliche Menge  $A$  mit  $n = |A|$  Elementen nur eine partielle Ordnung hat, funktioniert das Sortieren nicht. (Warum nicht?)

Es gibt aber einen entsprechenden Satz, der besagt, dass man  $A$  mit seiner partiellen Ordnung *topologisch sortieren* kann, d.h. es gibt immer (mindestens) eine Numerierung  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , für die gilt:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : x_i R x_j \Rightarrow i \leq j.$$

Beweise mithilfe dieses Satzes folgende Aussage: Zu jeder partiellen Ordnung  $R$  auf einer endlichen Menge  $A$  gibt es eine totale Ordnung  $R'$  mit  $R \subseteq R'$ . (In Worten: Jede partielle Ordnung auf einer endlichen Menge kann ich „durch Hinzufügen von Pfeilen“ zu einer totalen Ordnung ausbauen.)