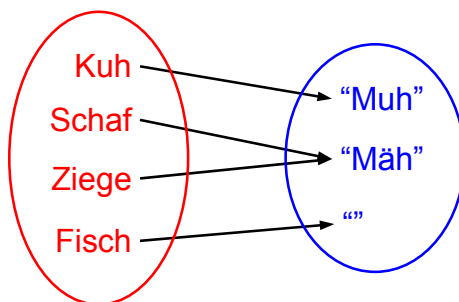


9 Abbildungen

- Eine *Abbildung* oder *Funktion* $f : A \rightarrow B$ ist eine Relation, bei der es für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt, das mit a in Relation steht. Wir schreiben dann $a \mapsto b$ oder $b = f(a)$.

Z.B. können wir aus der Tier-Relation aus Kapitel 7 durch Entfernen von Paaren (bzw. Pfeilen) eine Abbildung machen:



x	Kuh	Schaf	Ziege	Fisch
$f(x)$	„Muh“	„Mäh“	„Mäh“	„“

- Für eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt A der *Definitionsbereich* und B der *Wertevorrat* von f . Daher gehören beide zur Funktion! Daher sind $f(x) = x$ mit $A = [0, 1]$, $B = \mathbb{R}$ oder $A = [0, 1] = B$ oder $A = \mathbb{R} = B$ drei verschiedene Abbildungen f_1, f_2, f_3 !
- Der Wertevorrat muss nicht ausgeschöpft werden, daher noch ein weiterer Begriff: für $A' \subseteq A$ heißt

$$f(A') := \{f(x), x \in A'\}$$

die *Bildmenge* (auch: das Bild) von A' (unter f). Für $A' = A$ sind daher $f(A) \subseteq B$ genau die Elemente, die als Bild von f auftreten.

- Zu einem $b \in B$ ist

$$f^{-1}(b) := \{a \in A : f(a) = b\}$$

die *Urbildmenge* (auch: das Urbild) von b . Vorsicht: b ist ein Element, $f^{-1}(b) \subseteq A$ ist eine Menge mit eventuell mehreren oder keinen Elementen.

Die Definition läßt sich leicht auf beliebige Teilmengen $B' \subseteq B$ verallgemeinern:

$$f^{-1}(B') := \bigcup_{b \in B'} f^{-1}(b)$$

(Vereinigung aller einelementig definierten Urbilder).

- Es folgen mathematisch anspruchsvolle Begriffe, die allerdings nicht so kompliziert sind, wie sie klingen. Es sei zu überlegen, was diese auf Deutsch heißen könnten (dabei dürften die Wendungen „höchstens/wenigstens/genau eins“ hilfreich sein. . .)

- Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt *injektiv*, wenn gilt:

$$\forall b \in B : |f^{-1}(b)| \leq 1.$$

d.h. jedes b aus dem Wertevorrat hat höchstens ein Urbild.

- Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt *surjektiv*, wenn gilt:

$$\forall b \in B : |f^{-1}(b)| \geq 1.$$

d.h. jedes b aus dem Wertevorrat hat mindestens ein Urbild.

- Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt *bijektiv*, wenn gilt:

$$\forall b \in B : |f^{-1}(b)| = 1.$$

d.h. jedes b aus dem Wertevorrat hat genau ein Urbild.

- Also bijektiv \Leftrightarrow injektiv und surjektiv \Leftrightarrow eindeutig.

- Beispiele:

- Die Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $f(n) = n + 1$, ist nicht surjektiv. Wir können sie aber surjektiv machen durch Beschränkung des Wertevorrats auf den eigentlichen Bildbereich: Die Funktion $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $g(n) = n + 1$, ist surjektiv. Das funktioniert immer: Ist f nicht surjektiv, beschränke den Wertevorrat auf den Bildbereich \rightarrow surjektiv.

- Die Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $f(n) = |n - 1|$, ist nicht injektiv. Wir können sie aber injektiv machen durch Beschränkung des Definitionsbereichs: Die Funktion $g : \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}_0$, $g(n) = |n - 1|$, ist injektiv. Das funktioniert immer: Ist f nicht injektiv, beschränke den Definitionsbereich, um Mehrfachwerte zu vermeiden \rightarrow injektiv.

- Aus jeder Abbildung lässt sich durch Beschränkung des Wertevorrats und des Definitionsbereichs eine bijektive Abbildung gewinnen.
- Sätze:
 - $\forall U \subseteq B : f(f^{-1}(U)) \subseteq U$. Das Bild vom Urbild von U ist in U . $f^{-1}(U)$, das Urbild von U , sind alle Punkte, die nach U abgebildet werden. Daher gilt: $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$.
 - $\forall V \subseteq A : f^{-1}(f(V)) \supseteq V$. Das Urbild vom Bild von V enthält V . Das Urbild von $f(V)$ enthält laut Definition alle Punkte, die nach $f(V)$ abgebildet werden, also insbesondere V selbst.
 - Ist eine Abbildung bijektiv, so existiert eine Umkehrabbildung:

$$y = f(x), f^{-1}(y) = x : f^{-1}(f(x)) = x \text{ und } f(f^{-1}(y)) = y.$$
- Eine Menge ist abzählbar genau dann, wenn eine Bijektion existiert zwischen M und \mathbb{N} . Bijektion ist quasi Nummerierung von M . Beispiel: \mathbb{Q} , die Menge der rationalen Zahlen, ist abzählbar. \mathbb{R} dagegen ist nicht abzählbar.

Aufgaben

- 9.1 Ein Rechteck R mit Seitenlängen a und b habe eine Fläche von 10 cm^2 . Drücke den Umfang U von R als Funktion von b aus.
- 9.2 Gib (z.B. als Tabelle) die Und-Verknüpfung als Abbildung $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ an, wobei $\mathbb{B} := \{true, false\}$ die Menge der Wahrheitswerte sei. Ist die Abbildung injektiv und/oder surjektiv?
- 9.3 Existieren Abbildungen, die weder surjektiv noch injektiv sind? Gib gegebenenfalls solche Abbildungen an und veranschauliche sie anhand einer Skizze.
- 9.4 Prüfe die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:
- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0; x \mapsto x^2$
 - $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0; x \mapsto x^2$
 - $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; 1 \mapsto 1, x \mapsto x - 1$ für $x > 1$
 - $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; x \mapsto x - 1$
- 9.5 Gib jeweils zwei Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{N} an, die

- a) injektiv, aber nicht surjektiv
- b) bijektiv sind.

9.6 Gib eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ an.

9.7 Ordnet man jedem auftretenden Funktionswert y einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ die Elemente seiner Urbildmenge $f^{-1}(y)$ zu, so erhält man eine Relation. Unter welchen Bedingungen ist diese Umkehrrelation eine Abbildung?

Die in diesem Fall definierte Abbildung $B \rightarrow A$ heißt *Umkehrabbildung* und wird — etwas leichtsinnig — auch mit f^{-1} bezeichnet.

9.8 Die Bijektivität kann man gut einsetzen, um zu entscheiden, ob zwei Mengen gleich viele Elemente haben – dies ist genau dann der Fall, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen den beiden Mengen gibt.

- Demonstriere mit ein paar einfachen Beispielen, dass diese Definition für „kleine“ Mengen gut funktioniert.

Im Gegensatz zum intuitiven „Zählen der Elemente“ lässt sich das Kriterium Bijektivität auch auf unendliche Mengen übertragen:

- Vergleiche mit diesem Kriterium die Menge der geraden Zahlen mit der der ungeraden Zahlen.
- Gibt es mehr Zahlen die durch 2 teilbar sind, oder mehr, die durch 3 teilbar sind?

Mehr Erstaunliches über Bijektionen auf unendlichen Mengen findet man unter dem Stichwort „Hilberts Hotel“, z.B. in der Wikipedia.

9.9 Zusatzaufgabe: Zeige, dass auch für unendliche Mengen A gilt: $|A| \neq |P(A)|$, d.h., es gibt keine Bijektion zwischen A und $P(A)$.

Tipp: zu einer Bijektion $f : A \rightarrow P(A)$ könnte man sich die Menge aller $x \in A$ ansehen, für die $x \notin f(x)$ gilt...

