

## 11 Folgen (Folge 2)

- Die Folge  $(f_n)$  mit

$$f_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$$

konvergiert nicht gegen einen Grenzwert, aber die Werte 1 und  $-1$  haben ähnliche Eigenschaften wie ein Grenzwert. In jeder Umgebung sind unendlich viele Folgenglieder enthalten, aber eben für beide Werte!

- Einen Wert mit dieser Eigenschaft (in jeder Umgebung sind unendlich viele Folgenglieder enthalten) nennt man *Häufungspunkt* der Folge.
- Man beachte den Unterschied zwischen „nur endlich viele Folgenglieder sind außerhalb der Umgebung“ (Grenzwert) und „unendlich viele Folgenglieder sind in der Umgebung“ (Häufungspunkt).
- Eine beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt immer wenigstens einen Häufungspunkt. Beweis durch Intervallschachtelung: man betrachtet das Intervall zwischen einer unteren und einer oberen Schranke, halbiert es, überlegt sich, dass in wenigstens einer Hälfte noch unendlich viele Folgenglieder liegen müssen, halbiert diese Hälfte, ... Daher erzeugen wir auf diese Art und Weise eine geschachtelte Folge immer kleinerer Intervalle, deren Obergrenzen eine monoton fallende, beschränkte, also konvergente Folge bilden. Grenzwert dieser Folge ist ein Häufungspunkt!
- Von besonderem Interesse bei beschränkten Folgen ist der *größte Häufungspunkt*, oder *Limes superior* der Folge. Dazu betrachten wir zunächst zu einer beschränkten Folge  $(f_n)$  die Folge  $(g_n)$  mit

$$g_n := \sup_{m \geq n} f_m.$$

Wegen der Beschränktheit von  $(f_n)$  ist auch  $(g_n)$  beschränkt, weiter ist  $(g_n)$  monoton fallend (warum?), mithin konvergent und der Grenzwert

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} f_m$$

ist der größte Wert, für den in jeder Umgebung unendlich viele  $f_n$  liegen: der größte Häufungspunkt.

Zum Beweis sind zwei Eigenschaften zu zeigen:

- In jeder Umgebung liegen unendlich viele Folgenglieder.

– Kein größerer Wert hat diese Eigenschaft.

- Dazu überlegen wir uns, dass für  $C := \limsup x_n$  einer beschränkten Folge  $(x_n)$  gilt, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  nur endlich viele  $x_n$  größer als  $C + \varepsilon$  sind.
- Wären unendlich viele Glieder größer als  $C + \varepsilon$ , so könnte man daraus eine unendliche Folge definieren mit Häufungspunkt!
- Was passiert, wenn keine Konvergenz vorliegt? Divergenz:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0(\varepsilon) : f_n \notin U_\varepsilon(y).$$

In diesem Fall heißt die Folge *divergent*.

- Es gibt zwei verschiedene Formen der Divergenz:

– Divergenz als "Konvergenz" gegen Unendlich (+ oder –)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \infty : \Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R} : \exists n_0(C) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0(C) : f_n > C$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = -\infty : \Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R} : \exists n_0(C) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0(C) : f_n < C.$$

– Divergenz durch mehr als einen Häufungspunkt:  $f_n := (-1)^n$  (–1 und 1) oder  $g_n = n \cdot (-1)^n$  ( $+\infty$  und  $-\infty$ )

- Die  $O$ -Notation ( $O$  wie in *Oh!*, nicht 0 wie in  $1-1=0$ ) ist ein Werkzeug, um Folgen nach ihrem Wachstumsverhalten zu klassifizieren. Für eine Folge  $f = (f_n)$  wird die Klasse  $O(f)$  alle Folgen enthalten, die bis auf einen konstanten Faktor nicht schneller wachsen als  $f$ .
- Wir schreiben eine Folge  $(f_n)$  jetzt kurz und einfach z.B. als  $n^2$  an Stelle von  $n \mapsto n^2$ .
- In einer Klasse von Folgen  $O(n^2)$  wollen wir Folgen zusammenfassen, mit einem bestimmten Divergenzverhalten, z.B.:
  - $n$ , weil  $n \leq n^2$ ,
  - $16n^2$ , weil uns ein konstanter Faktor 16 nicht stört (nach wie vor gilt, dass sich mit doppeltem  $n$  das  $f_n$  vervierfacht: in diesem Sinn wachsen  $n^2$  und  $16n^2$  gleich schnell),
  - $n^2 + n + 1$ , weil das kleiner ist als  $3n^2$ ,

Aber nicht  $2^n$ , weil man für jedes  $C \in \mathbb{R}$  ein  $n$  finden kann mit  $2^n > C \cdot n^2$

- Mathematisch sieht das so aus:

$$f_n \in O(g_n) :\Leftrightarrow \exists C > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : |f_n| \leq C \cdot g_n \quad (11.1)$$

- Neu ist das  $n_0$ : Die Ungleichung muss nicht für alle Glieder gelten, sondern erst ab einem bestimmten Index (also für sehr große  $n$ ); endlich viele Ausnahmen sind erlaubt. Endlich viele Ausnahmen könnte man auch versuchen durch größeres  $n$  zuzulassen. Geht aber nicht für  $g_n = 0$ .
- Unter der Voraussetzung  $\forall n : g_n > 0$  kann man (11.1) umschreiben zu

$$f_n \in O(g_n) :\Leftrightarrow \exists C > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \frac{|f_n|}{g_n} \leq C$$

In dieser Form ist das  $n_0$  überflüssig: die Folge  $|f_n|/g_n$  muss beschränkt sein.

- Sollte man an einem möglichst kleinen  $C$  interessiert sein (normalerweise ist man das nicht), kann man sich auf die Suche nach dem *größten Häufungspunkt* der (beschränkten) Folge  $|f_n|/g_n$  begeben: wenn man den noch um ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  vergrößert, hat man ja eine Zahl  $C$ , für die nur endlich viele der Quotienten größer sind.
- Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält. Beispiel: nicht abgeschlossen:  $\mathbb{Q}, ]0, 1[$ ; abgeschlossen:  $\mathbb{R}, [0, 1]$
- Eine Menge kann abgeschlossen werden, indem man all ihre Häufungspunkte hinzunimmt:  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

## Aufgaben

11.1 Gib Folgen  $(a_n), (b_n)$  an mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \infty$ , sowie:

- $\lim(a_n - b_n) = 0$
- $\lim(a_n - b_n) = +\infty$
- $\lim(a_n - b_n) = -\infty$
- $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$
- $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 1$

11.2  $O$ -Notation: zeige, dass gilt

- $6n^4 \in O(3n^6)$ ,

- b)  $3n^2 + 2 \in O(n^2)$ ,
- c)  $16n^3 \in O(2^n)$ ,
- d)  $n^2 \notin O(n)$ ,
- e)  $n! \notin O(2^n)$

Gib im Fall von „ $\in$ “ ein entsprechendes  $C$  und ein  $n_0$  an, so dass Bedingung (11.1) erfüllt ist.

11.3 Bestimme alle Häufungspunkte und den größten Häufungspunkt von

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

(Bogenmaß!).

11.4 Nochmal zurück zu konvergenten Folgen: den Grenzwert einer Folge immer mit der  $\varepsilon$ -Definition zu berechnen, ist mühselig, deshalb kommen hier ein paar Rechenregeln.

Zeige: wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ , dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ .  
(Tipp:  $|a + b| \leq |a| + |b|$ )

Ebenfalls gilt dann (das zeigen wir hier aber nicht):  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \alpha \cdot \beta$   
und – wenn  $\beta$  und alle  $b_n \neq 0$  sind –  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = \alpha/\beta$

11.5 Prüfe jeweils auf Konvergenz und bestimme ggf. (mittels der Regeln aus der vorherigen Aufgabe) den Grenzwert:

- a)  $a_n = \frac{3n+2(-1)^n}{n}$
- b)  $b_n = \frac{nx^n}{nx^n+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}, x > 1$