12 Analysis

- *Definitionen der Stetigkeit*: Funktion $f(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig bei $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt, dass der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert gleich dem Funktionswert sind:

  $$\lim_{h \to 0^+} f(a+h) = f(a) = \lim_{h \to 0^-} f(a+h)$$

  Andere Definition: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

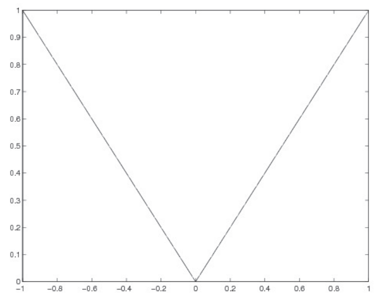
  $$|a - \zeta| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(\zeta)| < \varepsilon$$

  Anschaulich: Die Funktion macht keine Sprünge!

- Beispiele (Stetigkeit bzw. Unstetigkeit sind anzukreuzen):

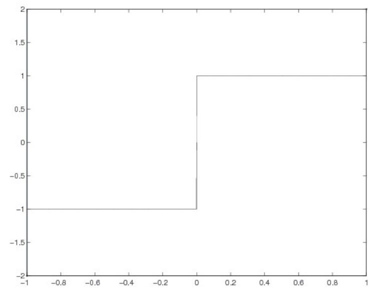
$$f(x) = \text{abs}(x) = |x|$$

Stetig ○
Unsteitg ○



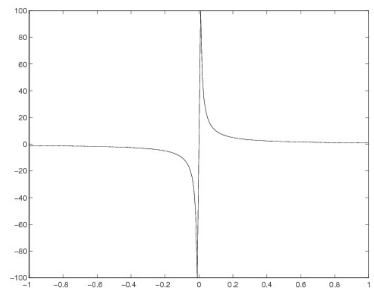
$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Stetig ○
Unsteitg ○

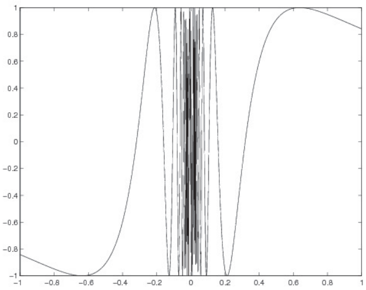


$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Stetig ○
Unsteitg ○

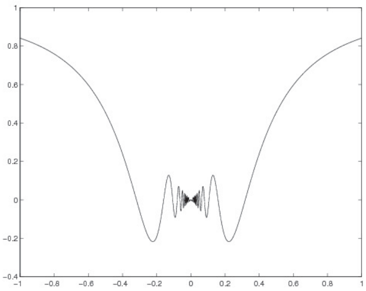


$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



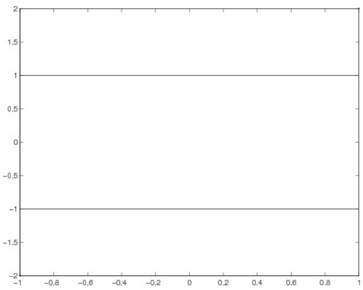
Stetig ○
Unsteitg ○

$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



Stetig ○
Unsteitg ○

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Stetig ○
Unsteitg ○

- *Differentialrechnung*

  Ableitung von $f(x)$ an der Stelle a:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

  Ableitung an allen Stellen a ergibt wieder eine neue Funktion $f'(a)$.

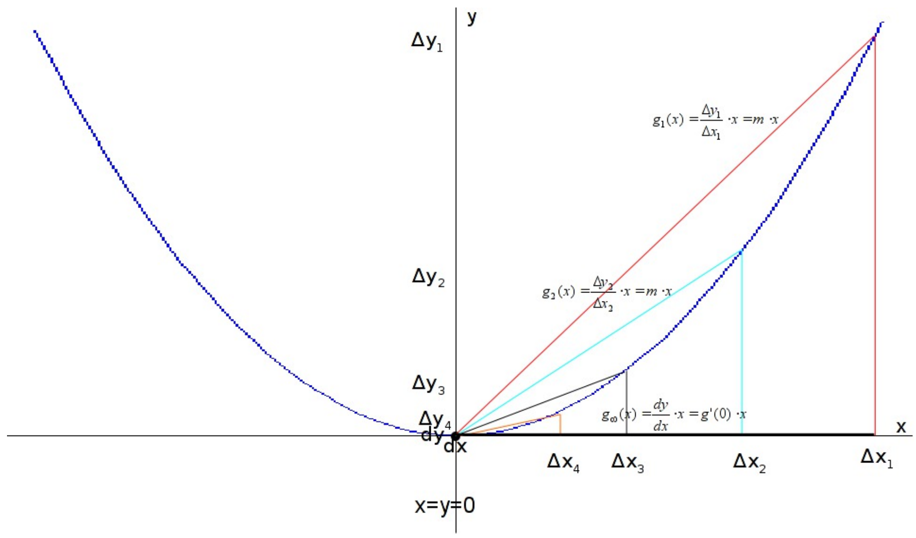


Abbildung 1: Anschauliche Darstellung von Steigungsdreiecken.

Beispiel: Ableitung von $f(x) = x^n$:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(a^n+nha^{n-1}+\ldots+h^n)-a^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{nha^{n-1}+\ldots+h^n}{h}\\ &= na^{n-1}\Rightarrow \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\end{aligned}$$

- Herleitung der Exponentialfunktion. Gegeben

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

mit beliebigen $a_k,\ k\geq 0$. Gesucht sind die Koeffizienten a_k, so dass $f'(x)=f(x)$:

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k k x^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}(k+1)x^k \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k = f(x).$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{k+1}=\frac{a_{k-1}}{(k+1)k}=\frac{a_{k-2}}{(k+1)k(k+1)}=\ldots=\frac{a_0}{(k+1)!}.$$

mit der Lösung

$$f(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = a_0 \exp(x).$$

- Weitere Ableitungen:

  $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$
  $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
  $\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x}$
  $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$
  $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$

- *Monotonie:* Ist die Ableitung an einer Stelle a größer 0, so weist die Tangente nach oben und die Funktion selbst ist bei a monoton wachsend.

  Ist die Ableitung an einer Stelle a gleich 0, so hat die Funktion bei a eine waagrechte Tangente:

  - lokales Maximum oder Minimum
  - Sattelpunkt

  Ist die zweite Ableitung an einer Stelle a größer 0, so weist die Tangente der Ableitung nach oben und die Ableitung selbst ist monoton wachsend. Die Funktion selbst ist dann bei a konvex gekrümmt (siehe Abbildung 2).

- *Ableitungsregeln*:

  - Produktregel:

    $$\frac{d}{dx} g(x) f(x) = g(x) f'(x) + g'(x) f(x)$$

    Beweis:

    $$\begin{aligned}
    &\lim_{h \to 0} \frac{g(a+h)f(a+h) - g(a)f(a)}{h} \\
    &= \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h)f(a+h) - g(a+h)f(a) + g(a+h)f(a) - g(a)f(a)}{h} \\
    &= \lim_{h \to 0} \left(g(a+h) \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \\
    &= g(a) f'(a) + g'(a) f(a).
    \end{aligned}$$

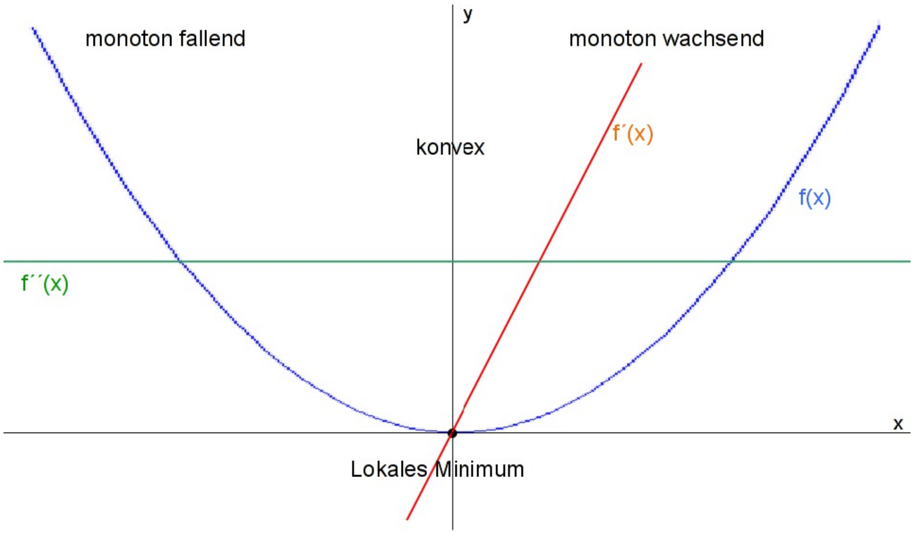


Abbildung 2: $f(x) = x^2,\ f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2$

- Kettenregel (gilt $y = g(x)$ und $z = f(y)$, so gilt auch $z = f(g(x))$):

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Beweis:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a) + \tilde{h}) - f(g(a))}{\tilde{h}} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= f'(g(a))g'(a).$$

- *Kurvendiskussion* der Funktion

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

mit den Ableitungen

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3},\ f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{2x-6}{x^4}.$$

Nullstellen von $f(x)$ sind $x_0 = 1$. Somit gilt für $x > 1 \to f(x) > 0$ und $x < 1 \to f(x) < 0$.

Polstellen von $f(x)$ sind $x_1 = 0$. Für $x > 2 \rightarrow f'(x) < 0$ ist $f(x)$ monoton fallend. Für $0 < x < 2 \rightarrow f'(x) > 0$ ist $f(x)$ monoton wachsend. Für $x < 0 \rightarrow f'(x) < 0$ ist $f(x)$ monoton fallend.

Nullstelle von $f'(x)$: $x_2 = 2$ wobei $f(2) = \frac{1}{4}$.

Für $x > 3$ ist $f''(x) > 0$ und damit $f(x)$ konvex. Für $x < 3$ ist $f''(x) < 0$ und damit $f(x)$ konkav.

Grenzwertbetrachtung:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

- Anschauliche Darstellung der Krümmung von $f(x)$ (siehe Abbildung 3):

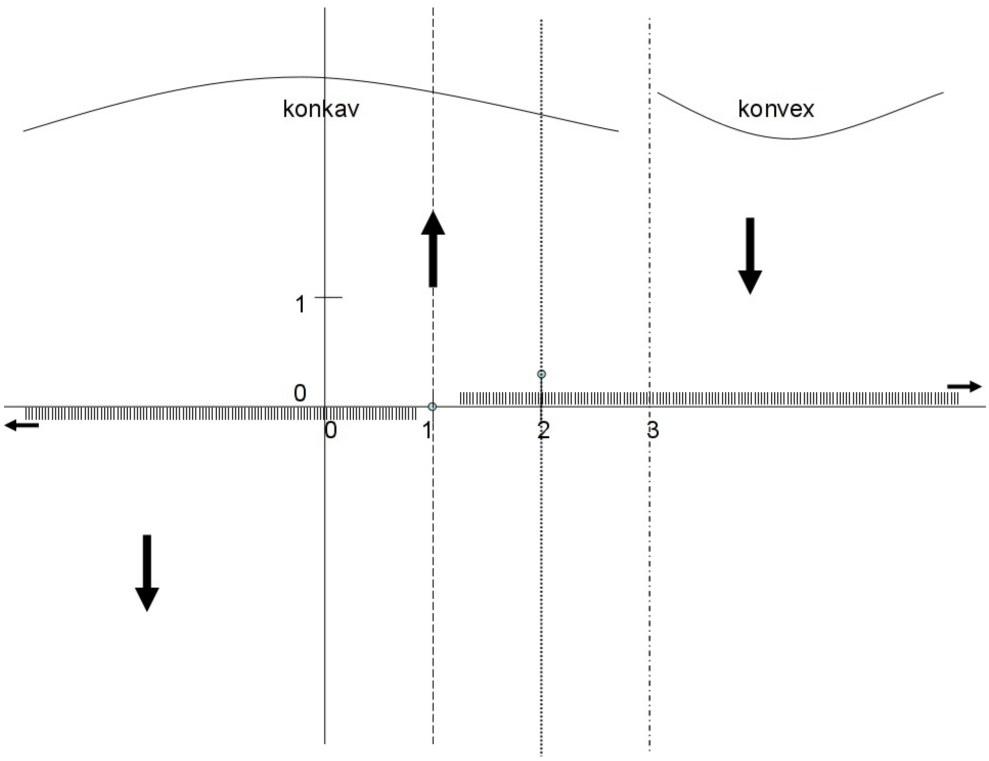


Abbildung 3: Krümmung von $f(x)$.

Aufgaben

12.1 Man zeige direkt anhand der ε-δ-Definition die Stetigkeit der Funktion $f(x) = |x|$. Wie kann man anhand der ε-δ-Definition zeigen, dass die Signumsfunktion

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0\ , \\ 0 & \text{für } x = 0\ , \\ -1 & \text{für } x < 0\ , \end{cases}$$

in $x = 0$ nicht stetig ist?

12.2 Man begründe die Identität

$$x = e^{\log(x)}$$

und leite durch beidseitiges Differenzieren eine Regel für die Ableitung des Logarithmus her.

12.3 Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f(x) = -x + x\log(x)\ .$$

Was lässt sich daraus folgern?

12.4 Man leite mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von $\frac{1}{g(x)}$ und anschließend mit der Produktregel die Ableitung von $\frac{f(x)}{g(x)}$ her.

12.5 In der Vorlesung wurde die Ableitungsregel

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

direkt anhand der Definition der Ableitung gezeigt. Beweise diese Ableitungsregel noch einmal mit vollständiger Induktion.

12.6 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung lautet:

> Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit
>
> $$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)\ .$$

a) Was bedeutet dieser Satz anschaulich?

b) Beweise den Satz von Rolle:

Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann besitzt der Graph von f zwischen a und b mindestens einen Punkt mit waagrechter Tangente.

12.7 Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4}{4x^2 - 16} .$$

a) Man gebe den maximalen Definitionsbereich von f an.

b) Zeige die Identität

$$f(x) - \frac{1}{4} = -\left(f(-x) - \frac{1}{4}\right) .$$

Was lässt sich daraus hinsichtlich der Symmetrie des Graphen von f folgern?

c) Berechne die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

d) Bestimme alle Asymptoten von f und berechne die Schnittpunkte des Graphen von f mit der schiefen Asymptote.

e) Berechne die ersten beiden Ableitungen von f.

$$\left(\text{Kontrolle:} \quad f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot \frac{x^2 - 12}{(x^2 - 4)^2}\right)$$

f) Bestimme alle Extrempunkte.

g) Untersuche f auf Wendepunkte.

h) Zeichne den Graphen von f unter Verwendung aller bisherigen Resultate.