

13 Kombinatorik

- In der *Kombinatorik* interessiert man sich dafür, wie viele Möglichkeiten es für die Ergebnisse bestimmter Versuchsanordnungen gibt — z.B., um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines solchen Ereignisses zu berechnen.
- Viele Probleme dieser Art lassen sich auf *Urnenmodelle* zurückführen.
- Wir stellen uns dazu n unterscheidbare Kugeln (nummerierte Lottokugeln) in einer Urne vor, aus denen nun nacheinander k Kugeln gezogen werden. Wenn Wahrscheinlichkeiten interessieren, soll bei jedem Zug die Wahrscheinlichkeit für jede Kugel gleich sein („blind ziehen“), zum Anzählen der Möglichkeiten reicht es, wenn in jedem Zug jede Kugel drankommen kann. Im Folgenden seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, wobei wir $0^0 = 0! = 1$ setzen.
- Für den Versuchsaufbau sind zwei Entscheidungen zu treffen:
 - man kann die gezogene Kugel wieder in die Urne zurücklegen (nachdem man sich die Nummer notiert hat...) oder nicht und
 - man kann sich beim Ergebnis dafür interessieren, in welcher Reihenfolge die Kugeln gezogen wurden oder nicht (letztes trifft z.B. beim Lotto zu, wo die Lottogesellschaft uns die Zahlen sortiert).

Somit sind vier verschiedene Fälle zu betrachten.

13.1 Ziehen mit Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge

- Wenn wir die Kugeln wieder zurückwerfen, haben wir in jedem der k Züge n Möglichkeiten.
- Das ist also wie in der Aufgabe mit den 2^k möglichen Zuständen von k Bit, nur dass dort der Spezialfall $n = 2$ untersucht wurde.
- Für allgemeines n haben wir dann n^k verschiedene Möglichkeiten.

13.2 Ziehen ohne Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge

- Jetzt werfen wir gezogene Kugeln nicht wieder zurück.

- Dann haben wir im ersten Zug nach wie vor n Kugeln, im zweiten Zug aber nur noch $n - 1$, im dritten $n - 2, \dots$, im letzten (k -ten) Zug noch $n - k + 1$ Kugeln zur Auswahl.
- Beim j -ten der k Züge also $n - j + 1$ Möglichkeiten, also insgesamt

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

mögliche Ergebnisse.

- Das lässt sich schreiben als

$$\frac{n!}{(n - k)!}$$

- Wichtig ist hier der Spezialfall $n = k$: es gibt $n!$ Möglichkeiten, um n Objekte anzuordnen.

13.3 Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

- Jetzt sortieren wir die Kugeln nach ihrer Nummerierung, bevor wir das Ergebnis verkünden — die Zugfolgen $(15, 4, 8)$ und $(4, 8, 15)$ zählen nun als gleich, wir sind also beim klassischen Lotto. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun noch?
- Wir haben vorhin gesehen, dass es bei k Objekten $k!$ verschiedene Anordnungen gibt. Daher müssen wir das vorherige Ergebnis einfach durch $k!$ dividieren:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Die Anzahl der verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten ist also genau durch die *Binomialkoeffizient* gegeben.

13.4 Ziehen mit Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

- Der schwierigste Fall zuletzt: wir werfen die Kugeln in die Urne zurück und identifizieren Zugfolgen, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, d.h., wir interessieren uns nur dafür, wie oft welche Kugel gezogen wird.

- Zum Beweis ersetzen wir das ursprüngliche Modell mit Kugeln und Zellen durch ein anderes Modell:
 - $n + k - 1$ Positionen. Verteile $n - 1$ Striche auf diese Positionen. Alle Positionen ohne Strich erhalten * (einen Stern).
 - Auf diese Art und Weise kann jedes mögliche Ereignis des ursprünglichen Urnenmodells eindeutig codiert werden.
 - Nun interpretieren wir dieses Strich/*-Modell wieder als ein Urnenmodell: Mögliche Kugeln = mögliche Positionen von $1, 2, \dots, n + k - 1$. Gezogen werden $n - 1$ Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Jede gezogene Kugel ist eine Position der $n - 1$ Striche.
 - Daher gibt es

$$\binom{n + k - 1}{n - 1} = \frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)!k!} = \binom{n + k - 1}{k}$$

Möglichkeiten, nämlich so viele, wie es Möglichkeiten gibt, aus den Zahlen $1, 2, \dots, n + k - 1$ genau $n - 1$ zu ziehen (ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge).

Aufgaben

13.1 Zeige:

$$\binom{n}{n - k} = \binom{n}{k}$$

13.2 Bei der Strich- Sternmalerei hätten wir auch mit Sternen anfangen können und $n - 1$ davon durch Striche ersetzen. Stelle eine Formel für die Anzahl der Möglichkeiten hierfür auf!

Zeige, dass diese Formel dieselben Werte liefert wie

$$\binom{n + k - 1}{k}$$

(na hoffentlich!)

13.3 Zeige

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k + 1} = \binom{n + 1}{k + 1}$$

und gib damit ein Schema zum Berechnen der Binomialkoeffizienten nur mittels von Additionen an (zum Rechnen von Hand sehr praktisch!). Wo haben wir dieses Schema schon mal gesehen?

- 13.4 Gib die Koeffizienten des Polynoms $(1 + x)^n$ mittels Binomialkoeffizienten an und zeige durch geschicktes Verwenden dieser Formel

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \text{ und, falls } n > 0, \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

- 13.5 Wie viele verschiedene Möglichkeiten zu tippen hat man beim klassischen Lotto „6 aus 49“ (Berechnen mit Taschenrechner oder per Hand mit Runden auf zwei gültige Ziffern)?
- 13.6 Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es beim Fußball-Toto? (13 Spiele sind zu tippen, jeweils Heimsieg, Heimniederlage oder Unentschieden – wieder Taschenrechner verwenden oder runden).
- 13.7 Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim Würfeln mit n nicht unterscheidbaren Würfeln (Ergebnis sind dabei die Punkte der einzelnen Würfel, also wäre z.B. bei fünf Würfeln 2,3,5,6,6 ein mögliches Ergebnis)?
- 13.8 Wie viele verschiedene „Full House“ gibt es beim Poker? (52 Karten, vier Farben mit je 2,3,4,..., 10, Bube, Dame, König, As)
- 13.9 Wie viele Anagramme (Wörter, die aus denselben Buchstaben bestehen – es geht nur um die möglichen Buchstabenvertauschungen, aussprechen können muss man die Anagramme nicht; Groß- und Kleinbuchstaben werden nicht unterschieden) gibt es von dem Wort *Muh*? Wie viele Anagramme gibt es von *Atlantis* und wie viele von *Mississippi*?